УДК 517.911, 517.968

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ. Часть 1

© А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; выпуклость по переключению значений (разложимость).

Рассмотрены вопросы продолжаемости решений функционально-дифференциального включения с полунепрерывной снизу правой частью и импульсными воздействиями.

В последние годы интенсивно (см. [1-8]) изучаются возмущенные включения, порождаемые алгебраической суммой значений многозначных отображений, одно из которых имеет выпуклые по переключению значения (определение см. ниже). К таким включениям сводятся многие классы дифференциальных включений (обыкновенные дифференциальные, функционально-дифференциальные и т. д.). В указанных работах исследованы вопросы разрешимости, получены оценки решений, аналогичные оценкам А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений, введено и исследовано понятие квазирешения, доказан принцип плотности и «бэнг-бэнг» принцип. В [1, 2, 4, 7] рассмотрены возмущенные включения с внешними и внутренними возмущениями. Выпуклость по переключению неявно используется во многих разделах математики: в теории оптимизации, теории дифференциальных включений и т. д.

В работе рассмотрены функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Показана продолжаемость решений функционально-дифференциального включения с полунепрерывной снизу (сверху) правой частью и импульсными воздействиями.

Доказано, что если множество всех локальных решений задачи Коши для функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями и полунепрерывной снизу правой частью, а также задачи Коши для функционально-дифференциальных включений с многозначными импульсными воздействиями априорно ограничено, то множество ее решений почти реализует (или реализует) расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений (определение см. ниже). На основе этого утверждения получены эффективные оценки решений данной задачи, аналогичные оценкам А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений.

Рассмотрено функционально-дифференциальное включение с импульсными воздействиями, с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений. С помощью понятия выпуклой по переключению оболочки множества сформулировано понятие обобщенного решения функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, правая часть которого не обладает свойством выпуклости по переключению значений. Доказано, что для задачи Коши с вольтерровым по А.Н. Тихонову оператором локальное обобщенное решение существует и оно продолжаемо. На основе топологических свойств овыпукленного по переключению отображения изучены свойства обобщенного решения задачи Коши.

Пусть $\mathbf{X}$ – нормированное пространство с нормой $\|\ \|_{\mathbf{X}}$. Обозначим $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ – расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h^{+}_{\mathbf{X}}[U_1;U] \equiv \sup\limits_{x\in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1;U] = \max\{h^{+}[U_1;U]; h^{+}[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; $2^{\mathbf{X}}$ – множество всех непустых ограниченных подмножества пространства $\mathbf{X}$.

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}^n_1(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$.

Будем говорить, что множество Φ, расположенное в $\mathbf{L}^n[a,b]$, *ограничено суммируемой функцией*, если существует такая функция $u \in \mathbf{L}^1[a,b]$, что для всех $\varphi \in \Phi$ при почти всех $t \in [a,b]$ выполнено неравенство $|\varphi(t)| \leqslant u(t)$.

Пусть $\Phi \subset \mathbf{L}^n_1[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению* (*разложимо*), если для любых $x, y \in \Phi$ и любого измеримого множества $e \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi_{(e)}x + \chi_{([a,b]\setminus e)}y \in \Phi$, где $\chi_{(\cdot)}$ – характеристическая функция соответствующих множеств.

Множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n_1[a,b]$ обозначим через $S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$. Через $\Omega(S(\mathbf{L}^n_1[a,b]))$ обозначим множество всех выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n_1[a,b]$.

Обозначим через $\Pi(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ ($Q(\mathbf{L}^n_1[a,b])$) множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n_1[a,b]$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}^1_{+}[a,b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ – это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

Рассмотрим задачу Коши для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)),\ k = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где полунепрерывное снизу отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}^n_1[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, ..., m$.

О п р е д е л е н и е 1. *Под решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k=1,...m$ удовлетворяют равенствам (2), $\chi_{(c,d]}(\cdot)$ – характеристическая функция полуинтервала $(c,d]$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить (см. [4]), что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a,b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau-$ сужение функции $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ на отрезок $[a,\tau]$, $(\Phi(z))|_\tau-$ множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров.

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau,b]. \end{cases} \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k:t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{6}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (5).

Далее, будем говорить, что функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ является *решением задачи* (1)-(3) *на* $[a,c)$, если для любого $\tau \in (a,c)$ сужение $x|_\tau \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, и найдется такая функция $q : [a,c) \to \mathbb{R}^n$, что для любого $\tau \in [a,c)$ $q|_\tau \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, и для любого $t \in [a,c)$ имеет место равенство (6), где $t_k \in [a,c)$.

Решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) будем называть *непродолжаемым*, если не существует такого решения y задачи (1)-(3) на $[a,\tau]$, (здесь $\tau \in (c,b]$, если $c < b$ и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Решение задачи (1)-(3) считается *непродолжаемым*.

Пусть для каждого $\tau \in (a,b]$ непрерывный оператор $\Lambda_\tau : \mathbf{L}_1^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$ имеет вид

$$(\Lambda_\tau z)(t) = x_0 + \int\limits_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,\tau]. \tag{7}$$

Определим отображение $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ равенством

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}_\tau(x) \;=\; \Big\{ y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] : \; \textit{существует} \;\; z \in (\Phi(V_\tau(x)))\,|_\tau, \\ \textit{что} \;\; \textit{при} \;\; \textit{любых} \;\; t \in [a,\tau] \; \textit{справедливо равенство} \\ y(t) = (\Lambda_\tau z)(t) + \sum_{k:t_k \le \tau} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)) \Big\}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $t_k \in [a,\tau]$ удовлетворяют равенствам (2), отображения $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и $\Lambda_\tau : \mathbf{L}_1^n[a,\tau] \to \mathbf{C}^n[a,\tau]$ определены формулами (5) и (7) соответственно. В дальнейшем, если $\tau = b$, то индекс в обозначении оператора $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ опускаем.

Очевидно, что каждая неподвижная точка оператора $\mathfrak{A}_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$, определенного равенством (8), является решением задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 1. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что решение задачи* (1)-(3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 2. *Для того, чтобы решение* $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (1)-(3) *было продолжаемым на некоторый отрезок* $[a, \tau]$ $(\tau \in [c, b])$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t \to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Т е о р е м а 3. *Если* x — *решение задачи* (1)-(3) *на* $[a, \tau]$, $\tau \in (a, b]$, *то существует непродолжаемое решение* y *задачи* (1)-(3) *либо на* $[a, c)$ $(c \in (\tau, b])$, *либо на* $[a, b]$ *такое, что при* $t \in [a, \tau]$ *выполнено равенство* $y(t) = x(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ — решение задачи (1)-(3) на отрезке $[a, \tau]$. Тогда существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))\Big|_\tau$, что для функции $x : [a, \tau] \to \mathbb{R}^n$ при любом $t \in [a, \tau]$ имеет место равенство (6). Пусть $\tau \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$ $(t_0 = a, t_{m+1} = b)$. Рассмотрим множесто всех продолжений решения $x : [a, \tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3). Обозначим это множество $\mathfrak{M}x$. Пусть

$$\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} < d, \tag{9}$$

причем если $\tau = t_{i+1}$, то $d > |I_{i+1}(x(t_{i+1}))|$. Тогда либо

1) для любого $y \in \mathfrak{M}x$ $(y : [a, \delta_y] \to \mathbb{R}^n$ — решение задачи (1)-(3) на отрезке $[a, \delta_y]$ $(\delta_y \in (\tau, b])$, являющееся продолжением решения $x : [a, \tau] \to \mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\delta_y]} \le d; \tag{10}$$

либо

2) существует $y_0 \in \mathfrak{M}x$, для которого имеет место равенство

$$|y_0(\delta_0)| > d.$$

Покажем, что в первом случае решение $x : [a, \tau] \to \mathbb{R}^n$ можно продолжить на весь отрезок $[a, b]$. Действительно, пусть

$$\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b] = \Big\{z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] : \ z = x \ \text{на} \ [a, \tau]\Big\}.$$

Так как множество $\mathfrak{M}x$ ограничено, то в силу непрерывности функций $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$ множество значений «скачков» в точках $t_k \in [\tau, b]$, $k = 1, 2, ..., m$ также ограничено. Пусть

$$l = \sup\Big\{|I_k(y(t_k))| : y \in \mathfrak{M}x, \ t_k \in [\tau, b], \ k = 1, 2, ..., m\Big\}. \tag{11}$$

Рассмотрим непрерывное отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное равенством

$$P(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \ \ |x| \le d + ml, \\ \frac{d+ml}{|x|}x, & \text{если} \ \ |x| > d + ml. \end{cases} \tag{12}$$

Определим отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b]$ формулой

$$(\mathcal{P}z)(t) = P(z(t)), \tag{13}$$

где отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет вид (12). Далее покажем, что отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b]$, заданное равенствами (12),(13), непрерывно на множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b]$. Действительно, пусть последовательность $z_i (\in \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a, b]) \to z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Покажем, что $\mathcal{P}z_i \to \mathcal{P}z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \to \infty$. Предположим противное. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$ и такие подпоследовательности $z_{i_j} \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и $t_{i_j} \in [a, b]$, $j = 1, 2, ...,$ для которых для любого $j = 1, 2, ...$ выполняются неравенства

$$|P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_{i_j}))| \ge \varepsilon. \tag{14}$$

Пусть $t_0 \in [a,b]$ — предельная точка подпоследовательности $t_{i_j} \in [a,b], \ \ j=1,2,\dots$. Не уменьшая общности будем считать, что $t_{i_j} \to t_0$ при $j \to \infty$. Пусть $t_0 \neq t_k, \ \ k=1,2,...,m$. Тогда выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} z_{i_j}(t_{i_j}) = z(t_0). \tag{15}$$

Так как

$$|P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_{i_j}))| \le |P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_0))| + |P(z(t_0)) - P(z(t_{i_j}))|,$$

то переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$ и учитывая непрерывность отображения $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенного равенством (12), а также равенство (15), получим

$$\lim_{j\to\infty} |P(z_{i_j}(t_{i_j})) - P(z(t_{i_j}))| = 0, \tag{16}$$

но это противоречит оценкам (14).

Пусть теперь t_0 равно одной из точек $t_k, \ \ k=1,2,...,m$. Тогда, если $t_{i_j} \le t_0, \ \ j=1,2,...$, то равенство (15) выполняется, из которого следует равенство (16), что также противоречит оценкам (14).

Пусть теперь $t_0 < t_{i_j}, \ \ j=1,2,\dots$. В силу того, что $z_i \to z$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ при $i \to \infty$, то выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} z_{i_j}(t_{i_j}) = z(t_0+0),$$

из которого следует равенство (16). Это противоречит оценкам (14). Таким образом, отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$, имеющее вид (13), непрерывно в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Далее полунепрерывное снизу отображение $\Phi_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to S[\mathbf{L}^n_1[a,b]]$ определим равенством

$$\begin{aligned}\Phi_x(z) = \ &\Big\{p \in \mathbf{L}^n_1[a,b] : p = q \ \ \textit{на} \ \ [a,\tau] \\ &\textit{и существует } v \in (\Phi(z))\big|_{[\tau,b]}, \ \textit{что } p = v \ \textit{на } [\tau,b]\Big\},\end{aligned} \tag{17}$$

где $(\Phi(z))\big|_{[\tau,b]}$ — множество всех сужений на отрезок $[\tau,b]$ функций из множества $\Phi(z)$, функция $q \in (\Phi(V_\tau(x)))\big|_\tau$ из представления (6). Отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$ зададим формулой

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{A}}_x(z) = \Big\{&p \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] : \textit{существует } v \in \Phi_x(z), \\ &\textit{что при любых } t \in [a,b] \textit{ справедливо равенство} \\ &p(t) = (\Lambda_b v)(t) + \sum_{k=1}^m \chi(t_k,b]\Delta(z(t_k))\Big\},\end{aligned} \tag{18}$$

где отображение $\Phi_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to S[\mathbf{L}^n_1[a,b]]$ задано формулой (17). Из определения отображения $\widetilde{\mathfrak{A}}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$, имеющего вид (18), следует, что для любого $z \in \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ имеет место равенство

$$(\widetilde{\mathfrak{A}}_x(z))\big|_\tau = x. \tag{19}$$

Таким образом, справедливо вложение

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_x(\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]) \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]. \tag{20}$$

Рассмотрим на множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ включение

$$y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_x(\mathcal{P}(y)). \tag{21}$$

Так как оператор $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$, определенный равенствами (12),(13), непрерывен, а отображение $\Phi_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to S[\mathbf{L}^n_1[a,b]]$, имеющее вид (17), полунепрерывно снизу, то суперпозиция $(\Phi_x\mathcal{P}) : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to S[\mathbf{L}^n_1[a,b]]$ полунепрерывна снизу. Поэтому согласно [1, 2] найдется такое непрерывное отображение $\mathcal{R}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \mathbf{L}^n_1[a,b]$, что для любого $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ выполнены включения

$$\mathcal{R}_x(y) \in \Phi_x(\mathcal{P}(y)), \qquad \Lambda_b\mathcal{R}_x(y) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_x(\mathcal{P}(y)). \tag{22}$$

Так как оператор $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ ограничен, то образ $\widetilde{\mathfrak{A}}_x(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]))$ согласно теореме 2.1.1 относительно компактен в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Поэтому, согласно теореме Шаудера, произведение $(\Lambda_b\mathcal{R}_x)$ имеет неподвижную точку. Из второго включения (22), эта неподвижная точка — решение включения (21), которое обозначим через p.

Далее покажем, что p — неподвижная точка отображения $\widetilde{\mathfrak{A}}_x : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$, заданного равенством (18). Для этого согласно определению отображения $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ (см. (12), (13)) достаточно доказать неравенство

$$\|p\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leq d + ml. \tag{23}$$

Прежде всего заметим, что справедливо соотношение

$$p|_\tau = x. \tag{24}$$

Пусть $\tau \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 1,2,...,m$ $(t_0 = a, t_{m+1} = b)$. Покажем, что для любого $\eta \in (\tau, t_{k+1})$ сужение $p|_\eta$ — продолжение решения x. Предположим противное. Тогда согласно определению отображения $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ (см. равенства (12), (13)) найдется такое $\eta \in (\tau, t_{k+1})$, что выполняется неравенство

$$|p(\eta)| > d + ml.$$

Тогда в силу непрерывности функции p на интервале (t_k, t_{k+1}) и равенства (24) и оценки (9) найдется такое $\widetilde{\eta} \in (\tau, \eta)$, для которого имеет место соотношение

$$\|p\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\widetilde{\eta}]} = d + ml.$$

Из определения оператора $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ (см. (12), (13)) следует, что сужение $p|_{\widetilde{\eta}}$ — продолжение решения x, но это противоречит неравенству (10).

Рассмотрим теперь случай, когда τ равно некоторому t_k, $k = 1,2,...,m$. Пусть $\tau = t_k$. Из определения числа l (см. (11)) следует, что

$$|I_k(x(t_k))| \leq l.$$

Поэтому из соотношения (9) вытекает оценка

$$\lim_{t \to t_k+0} |p(t)| < d + l. \tag{25}$$

Из неравенства (25) и доказанного ранее следует, что для любого $t \in (t_k, t_{k+1}]$ имеет место оценка

$$|p(t)| < d + l.$$

Так как из равенства (11) следует оценка

$$|I_{k+1}(p(t_{k+1}))| \leq l,$$

то
$$\lim_{t\to t_{k+1}+0}|p(t)|<d+2l. \tag{26}$$
Из оценки (26) следует, что для любого $t\in(t_{k+1},t_{k+2})$ выполняется неравенство
$$|p(t)|<d+2l.$$
Продолжая такой процесс, дальше получим, что для любого $t\in(t_k,b]$ справедлива оценка
$$|p(t)|<d+ml. \tag{27}$$
Из неравенства (27) и определения отображения $\mathcal{P}:\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]\to\widetilde{\mathbf{C}}^n_x[a,b]$ следует, что функция $p\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — продолжение решения x.

Рассмотрим второй случай. Возьмем число $d+1$. Тогда для множества $\mathfrak{M}y_0$ выполнено одно из двух предположений: либо

1) для любого $y\in\mathfrak{M}y_0$ выполнено неравенство
$$\|y\|_{\mathbf{C}^n[a,\delta_y]}<d+1;$$
либо

2) существует $y_1\in\mathfrak{M}y_0$, для которого имеет место оценка
$$|y_1(\delta_1)|>d+1.$$
Если выполнено первое условие, то, согласно доказанному, решение x продолжаемо на весь отрезок $[a,b]$. Предположим, что выполнено второе условие. Тогда выберем число $d+2$. Продолжая такой процесс дальше, получим, что либо x продолжаемо на весь отрезок $[a,b]$, либо найдутся такие последовательности функций y_i и монотонная последовательность чисел $\delta_i\in(\tau,b]$, что для любого $i=0,1,2\ldots$ x_i — продолжение решения x, $y_i\in\mathfrak{M}y_{i-1}$ и выполнены оценки
$$|y_i(\delta_i)|>d+i. \tag{28}$$
Рассмотрим функцию $z:[a,w)\to\mathbb{R}^n$, где $w=\lim\limits_{i\to\infty}\delta_i$, имеющую вид
$$z(t)=\begin{cases} x(t), & \textit{если} \quad t\in[a,\tau],\\ y_0(t), & \textit{если} \quad t\in(\tau,\delta_0],\\ y_1(t), & \textit{если} \quad t\in(\delta_0,\delta_1],\\ \cdots & \cdots \quad \cdots\\ y_i(t), & \textit{если} \quad t\in(\delta_{i-1},\delta_i]\\ \cdots & \cdots \quad \cdots \end{cases}.$$
Из определения функции $z:[a,w)\to\mathbb{R}^n$ и оценки (28) следует, что функция $z:[a,w)\to\mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение задачи (1)-(3) на $[a,c)$. Теорема доказана.

Пусть $\tau\in(a,b]$. Обозначим через $H(x_0,\tau)$ множество решений задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что множество всех локальных решений задачи (1)-(3) *априорно ограничено*, если найдется такое число $r>0$, что для всякого $\tau\in(a,b]$ не существует решения $y\in H(x_0,\tau)$, для которого выполняется неравенство $||y||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}>r$.

Т е о р е м а 4. *Если множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено, то существует такой выпуклый компакт* $K\subset\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, *что* $H(x_0,b)\subset K$, *для любого* $\tau\in(a,b)$ *выполняется равенство* $H(x_0,\tau)=H(x_0,b)|_{[a,\tau]}$, и $\mathfrak{A}(K)\subset K$, *где отображение* $\mathfrak{A}:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]\to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ *определено равенством* (8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 найдется такое $\tau \in (a, b]$, что $H(x_0, \tau) \neq \varnothing$. Согласно теореме 3 и условия априорной ограниченности множества локальных решений задачи (1)-(3), любое локальное решение продолжаемо на отрезок $[a, b]$. С другой стороны, из вольтерровости оператора $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S[\mathbf{L}_1^n[a, b]]$ следует, что сужение на отрезок $[a, \tau]$ $(\tau \in (a, b))$ решения x задачи (1)-(3) есть локальное решение на отрезке $[a, \tau]$. Поэтому для любого $\tau \in (a, b)$ выполняется равенство $H(x_0, \tau) = H(x_0, b)|_{[a,\tau]}$.

Теперь покажем, что найдется такой выпуклый компакт $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, для которого имеют место вложения

$$H(x_0, b) \subset K, \quad \mathfrak{A}(K) \subset K.$$

Действительно, пусть непрерывное отображение $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задано равенством (12), в котором $d = r$ (r – число, удовлетворяющее определению априорной ограниченности множества всех локальных решений задачи (1)-(3)), а $l = \widetilde{l}$, где

$$\widetilde{l} = \sup\Big\{|I_k(y(t_k))| : y \in H(x_0, b),\ t_k \in [a, b],\ k = 1, 2, ..., m\Big\}. \tag{29}$$

Определим отображение $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ формулой

$$(\mathcal{P}z)(t) = P(z(t)).$$

Рассмотрим на множестве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ включение

$$x \in \mathfrak{A}(\mathcal{P}(x)), \tag{30}$$

где отображение $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}$ определено равенством (8).

Аналогично доказательству того, что неподвижная точка включения (21) является продолжением локального решения x в теореме 3, доказывается, что множество решений задачи (1)-(3) совпадает с множеством решений включения (30). В силу того, что оператор $\mathcal{P} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ ограничен, то образ $\Phi(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ ограничен суммируемой функцией, а это означает, что $\mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ – предкомпактное множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$. Следовательно, $\overline{\text{co}}\ \mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$ – выпуклый компакт пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$. Пусть $K = \overline{\text{co}}\ \mathfrak{A}(\mathcal{P}(\widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]))$. Тогда из определения множества K следует, что $\mathfrak{A}(K) \subset K$ и $H(x_0, b) \subset K$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. Матем., механика. 2005. № 1. С. 3-20.

2. *Булгаков А. И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.

3. *Тихонов А. Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

4. *Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia. math. 1988. V.90. № 1. P. 69–86.

5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

7. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

9. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter. Berlin; New-York, 2001.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 07-01-00305, № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (программа Развитие научного потенциала высшей школы, проект № 2.1.1/1131), Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE (грант PRO 06/02) при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования(NUFU).

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.

Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Functional-differential inclusions with impulses. Part 1. There are considered the questions of extendability of solutions to functional-differential inclusions with lower semicontinuous right-hand side and with impulses.

Key words: functional-differential inclusion; impulses; convex-valued with respect to switching.